Soluciones a los problemas del tutorial

Estructuras Discretas: Relaciones

PROBLEMA 1:

Sea $\mathcal{R} \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ y tal que $a\mathcal{R}b \Leftrightarrow a+b$ es par. Demostrar que es una relación de equivalencia y calcular sus clases de equivalencia.

SOLUCIÓN.

Veamos si es reflexiva simétrica y transitiva:

1) Tanto si $z_1$ es par como si impar $z_1 + z_1$ será par y entonces $z_1\mathcal{R}z_1$, luego es reflexiva.

2) Si $z_1 + z_2$ es par $z_2 + z_1$ es necesariamente par así que es simétrica.

3) Para que sea transitiva se debe cumplir que $z_1\mathcal{R}z_2 \wedge z_2\mathcal{R}z_3 \Rightarrow z_1\mathcal{R}z_3$. Vamos todos los casos posibles. Si $z_1$ es par $z_2$ tiene que ser par para que $z_1 + z_2$ sea par. Si $z_2$ es par $z_3$ tiene que ser par para que $z_2 + z_3$ sea par. Pero entonces esto significa que $z_1 + z_3$ es par.
Por otro lado si $z_1$ es impar $z_2$ tiene que ser impar para que $z_1 + z_2$ sea par. Si $z_2$ es impar $z_3$ tiene que ser impar para que $z_2 + z_3$ sea par. Pero entonces esto significa que $z_1 + z_3$ es par. Luego $z_1\mathcal{R}z_2 \wedge z_2\mathcal{R}z_3 \Rightarrow z_1\mathcal{R}z_3$ como queríamos demostrar.

PROBLEMA 2:

Demostrar que las siguientes relaciones son de equivalencia. Encontrar las correspondientes clases de equivalencia y el conjunto cociente $V/\mathcal{R}$:

1. $V = \mathbb{Z}$ y $v\mathcal{R}w$ si $|v - w|$ es múltiplo de 2.
2. $V = \mathbb{Z}$ y $v\mathcal{R}w$ si $v^2 - w^2 = v - w$. Describir la clase de equivalencia de 2005.
3. $V = \mathbb{R}^2$ y $(x, y)\mathcal{R}(u, w)$ si $xy = uw$.
4. $V = \mathbb{R}^2$ y $(x, y)\mathcal{R}(u, w)$ si $(x - y)(x + y) = (u - w)(u + w)$.
5. $V = \mathbb{R}^2$ y $(x, y)\mathcal{R}(u, w)$ si $x^2 + y^2 = u^2 + w^2$.

SOLUCIÓN.

Si definimos sobre un conjunto no vacío $A$ una función $f$ definida sobre un dominio, entonces se puede demostrar que la relación $\mathcal{R}$ sobre $A$ consistente en todos los pares ordenados $(a, b)$ tales que $f(x) = f(y)$ es una relación de orden y que las clases de equivalencia son los conjuntos $f^{-1}(b)$, estando $b$ en la imagen de $f$. Claramente es reflexiva, pues $f(x) = f(x)$, simétrica pues $f(x) = f(y) = f(x)$ y reflexiva, ya que si $f(x) = f(y) = f(z)$ entonces $f(x) = f(z)$.

1) Es reflexiva porque $|v - v| = 0$ y 2 divide a 0. Además $|v - w| = |w - v|$ sea o no divisible por 2, pero si lo es uno lo es el otro, así que es simétrica. Si 2 divide a $|v - w|$ necesariamente $v - w$ debe ser par, algo que se da si los dos son impares o los dos son pares. Si $v$ es par $w$ también los es y lo será $u$ si $w\mathcal{R}u$. Entonces $v\mathcal{R}u$. Lo mismo se puede decir para el caso

impar y por tanto es transitiva. Las clases serán los pares y los impares así que $\mathbb{Z}/\mathcal{R} = \{[0],[1]\}$.

2) En este caso podemos reescribir $v^2 - w^2 = v - w$ como $f(v) = v^2 - v = w^2 - w = f(w)$ y las condiciones del encabezado se pueden aplicar. Luego es reflexiva, simétrica y transitiva.
Podemos introducir en $v^2 - v = w^2 - w$ tanto las soluciones $v = 1 - w$ como $v = w$ y comprobar que son correctas. Así que si tomamos $w = n$ las clases serán $[n] = \{(n, 1-n), n \in \mathbb{N}\}$ y en este caso $\mathbb{Z}/\mathcal{R} = \mathbb{N}$.
La clase de equivalencia de 2005 será $[2005] = [2005, -2004]$.

3) Es de equivalencia ya que es reflexiva, simétrica y transitiva porque es una función del tipo $f(x, y) = f(u, w)$.
Si tomamos $xy = \alpha = constante$ vemos que o bien son hipérbolas en los cuadrantes de $\mathbb{R}$ superior derecho e inferior izquierdo (para $\alpha > 0$), en los cuadrantes superior izquierdo e inferior derecho (para $\alpha < 0$) o son los propios ejes coordenados (para $\alpha = 0$) y por tanto cubrimos todo $\mathbb{R}$, así que $V/\mathcal{R} = \mathbb{R}$

4) Es de equivalencia ya que es reflexiva, simétrica y transitiva, porque es una función del tipo $f(x, y) = f(u, w)$. Además se puede ver que en realidad la condición es $x^2 - y^2 = u^2 - w^2$.

5) Es de equivalencia ya que es reflexiva, simétrica y transitiva al ser una función del tipo $f(x, y) = f(u, w)$.
Si tomamos $x^2+y^2 = \alpha = constante$ vemos que o bien son las bisectrices de los ejes coordenados (para $\alpha = 0$) o las hipérbolas superiores e inferiores ($\alpha > 0$) o bien de los lados ($\alpha < 0$). $V/\mathcal{R} = \mathbb{R}^2/\mathbb{R} = \mathbb{R}$

PROBLEMA 3:

Sea la relación $\mathcal{R}$ definida sobre $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ de manera que $(a, b)\mathcal{R}(c, d)$ si y sólo si $a + b = c + d$. Demostrar que $\mathcal{R}$ es una relación de equivalencia y que existe una biyección entre el conjunto cociente $(\mathbb{N} \times \mathbb{N})/\mathcal{R}$ y $\mathbb{N}$.

Solución.

Es reflexiva pues $a+b = a+b$. Es simétrica por si $a+b = c+d$ entonces $c+d = a+b$ y es transitiva pues si $a+b = c+d$ y $c+d = e+f$ entonces $a+b = e+f$. Luego es una relación de equivalencia.

Si tomamos $a + b = \alpha = constante$, entonces $\alpha$ necesariamente pertenece a $\mathbb{N}$ menos el 1. Veamos unos cuantos casos:

$$\begin{array}{ccl} 2 & = & (1,1) \\ 3 & = & (1,2) \text{ o } (2,1) \\ 4 & = & (2,2) \text{ o } (1,3) \text{ o } (3,1) \\ 5 & = & (4,1) \text{ o } (3,2) \text{ o } (2,3) \text{ o } (1,4) \\ \ldots & = & \ldots \end{array}$$

Las clases de equivalencia serán del tipo

$$[1 + k] = \{(m, 1 + k - m), 1 \leq m \leq k\} \; k \in \mathbb{N}$$

Y el conjunto cociente será:

$$(\mathbb{N} \times \mathbb{N})/\mathcal{R} = \{[1 + k] \mid k \in \mathbb{N}\}$$

PROBLEMA 4:

En $\mathbb{R}_2 = \mathbb{R} \times (\mathbb{R} \setminus \{0\})$ se define la relación $(a, b)\mathcal{R}(c, d)$ si y sólo si $ad = bc$. Demostrar que $\mathcal{R}$ es una relación de equivalencia y encontrar las clases de equivalencia y el conjunto cociente.

Solución.

La relación se puede escribir de la forma $f(x) = f(y)$ sin más que pasar unos términos al otro lado de la igualdad, con lo que tendremos $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d}$ y podemos aplicar lo mencionado ya mencionado para funciones. Así que es una relación de equivalencia. Aunque obviamente $a/b = a/b$ (reflexiva), $a/b = c/d = a/d$ (simétrica) y $a/b = c/d = e/f \;\Rightarrow\; a/b = e/f$ (transitiva).

Si tomamos valores $a/b = \alpha$, es decir $a = \alpha b$ (ecuación de la recta), vemos que son rectas de cualquier pendiente que pasan por el origen pero sin incluirle. El conjunto cociente será $V/\mathcal{R} = \mathbb{R}$

PROBLEMA 5:

Una relación $\mathcal{R}$ definida en $V$ es circular si verifica

$$(a\mathcal{R}b) \wedge (b\mathcal{R}c) \;\Rightarrow\; c\mathcal{R}a\,.$$

Demostrar que una relación $\mathcal{R}$ es de equivalencia si y sólo si es circular y reflexiva.

Solución.

Nos piden demostrar que es de equivalencia $\Leftrightarrow$ circular y reflexiva. Lo haremos en dos pasos.

1) de equivalencia $\Rightarrow$ circular y reflexiva.

Si es de equivalencia ya es reflexiva, simétrica y transitiva, así que ya se cumple que sea reflexiva. Como es transitiva $(a\mathcal{R}b) \wedge (b\mathcal{R}c) \;\Rightarrow\; a\mathcal{R}c$ y al ser simétrica $a\mathcal{R}c \Rightarrow c\mathcal{R}a$, así que $(a\mathcal{R}b) \wedge (b\mathcal{R}c) \;\Rightarrow\; c\mathcal{R}a$ y por tanto es circular.

2) de equivalencia $\Leftarrow$ circular y reflexiva.

Si es circular $(a\mathcal{R}b) \wedge (b\mathcal{R}c) \;\Rightarrow\; c\mathcal{R}a$, pero si es reflexiva entonces $\exists b\mathcal{R}b$, así que $(a\mathcal{R}b) \wedge (b\mathcal{R}b) \;\Rightarrow\; b\mathcal{R}a$ y por tanto es simétrica. Falta demostrar que sea transitiva.
Si es circular $(a\mathcal{R}b) \wedge (b\mathcal{R}c) \;\Rightarrow\; c\mathcal{R}a$, pero como ya hemos demostrado que es simétrica $c\mathcal{R}a \Rightarrow a\mathcal{R}c$ y por tanto $(a\mathcal{R}b) \wedge (b\mathcal{R}c) \;\Rightarrow\; a\mathcal{R}c$ que es la definición de transitiva.

PROBLEMA 6:

Una relación $\mathcal{R}$ definida en $V$ es débilmente transitiva si para todo $a, b, c, d \in V$ se verifica que

$$(a\mathcal{R}b) \wedge (b\mathcal{R}c) \wedge (c\mathcal{R}d) \;\Rightarrow\; a\mathcal{R}d\,.$$

Discutir la veracidad o falsedad de las siguientes afirmaciones:

(1) Toda relación simétrica y débilmente transitiva es transitiva.

(2) Toda relación reflexiva, simétrica y débilmente transitiva es de equivalencia.

Solución.

(1) Falso. Basta un contraejemplo que se visualiza bien con un digrafo. $(1\mathcal{R}2) \wedge (2\mathcal{R}3) \wedge (3\mathcal{R}4) \Rightarrow (1\mathcal{R}4)$, pero $(1\mathcal{R}2) \wedge (2\mathcal{R}3) \not\Rightarrow (1\mathcal{R}3)$.

(2) Verdadero. Falta la transitividad para que sea de equivalencia. Como es reflexiva podemos usar $c\mathcal{R}c$ en la expresión $(a\mathcal{R}b) \wedge (b\mathcal{R}c) \wedge (c\mathcal{R}d) \Rightarrow (a\mathcal{R}d)$ y obtener $(a\mathcal{R}b) \wedge (b\mathcal{R}c) \wedge (c\mathcal{R}c) \Rightarrow (a\mathcal{R}c)$ que es precisamente la definición de transitiva, así que es verdad.

PROBLEMA 7:

Probar que la relación $\leq$ es una relación de orden en el conjunto $\mathbb{N}$.

SOLUCIÓN.

Es reflexiva pues $a \leq a$ para todo elemento de $\mathbb{N}$. Además si $a \leq b$ y $b \leq c$ entonces necesariamente $a \leq c$, luego es transitiva. Falta por demostrar la antisimetría.
No es simétrica pues $a \leq b \nRightarrow b \leq a$, pero no nos garantizaría la antisimetría aún en el caso general. En este caso en particular si $a \leq b$ y $b \leq$ entonces necesariamente $a = b$, luego es antisimétrica.

PROBLEMA 8:

Probar que la relación $\mathcal{R}$ sobre $\mathbb{N}$ definida como $a\mathcal{R}b$ si y sólo si $a$ divide a $b$ ($a|b$, es decir que la dividir $b$ por $a$ el resto es cero) es una relación de orden.

SOLUCIÓN.

Es reflexiva pues todo número se divide a sí mismo $a|a$. Pero, ¿$a|b \wedge b|c \Rightarrow a|c$?, es decir, ¿es transitiva? Si dividimos $c$ entre $b$ y nos da $d$ entonces $c = b \cdot d$ y los mismo para $a$ y $b$ de tal modo que podemos escribir $b = a \cdot e$. Si sustituimos la segunda expresión en la primera tenemos que $c = a \cdot e \cdot d$ y por tanto que $a|c$, así que es transitiva. Y es antisimétrica, pues si $a|b$ y $b|a$ entonces necesariamente debe ser el mismo número $a = b$

Obsérvese que si fueran los enteros ($\mathbb{Z}$) en lugar de los naturales ($\mathbb{N}$) no sería antisimétrica. Podemos dar un contraejemplo muy sencillo: $2|-2$ y $-2|2$ pero $2 \neq -2$.

PROBLEMA 9:

Determinar si las relaciones representadas por las siguientes matrices de adyacencia son relaciones de orden parcial o total.

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

SOLUCIÓN.

En $A_1$ vemos que debido al elemento (3,2) de la matriz la relación no es antisimétrica. $A_2$ nos dice que la relación es transitiva y antisimétrica. $A_3$ es antisimétrica y reflexiva, pero no transitiva. $A_4$ es antisimétrica y transitiva, además todos los elementos están comparados.